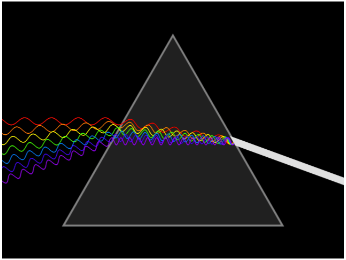
Introduction à l'homotopie chromatique

Séminaire Bourbaki du vendredi



Homotopie stable des sphères

$$\pi_i(X) := [S^i, X]_*$$

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{120}\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^5$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{120}$

$\searrow \pi_0^s \ \searrow \pi_1^s \ \searrow \pi_2^s \ \searrow \pi_3^s \ \searrow \pi_4^s \ \searrow \pi_5^s$

(Freudenthal, 1938) Chaque diagonale $\searrow$ stabilise. On note π_k^s la valeur stable.

(Isaksen-Wang-Xu, 2020) On connaît tout jusqu'au π_{90}^s.

k	π_k^s	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=7$	$p=11$
0	$\mathbb{Z}$	-	-	-	-	-
1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0
2	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0
3	$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{2^3}$	$\mathbb{Z}_3$	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0
7	$\mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{2^4}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_5$	0	0
8	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	0	0	0	0
9	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$(\mathbb{Z}_2)^3$	0	0	0	0
10	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	0	0
11	$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_{2^3}$	$\mathbb{Z}_9$	0	$\mathbb{Z}_7$	0
12	0	0	0	0	0	0
13	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	0	0	0
14	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	0	0	0	0
15	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^5}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_5$	0	0
16	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	0	0	0	0
17	$(\mathbb{Z}_2)^4$	$(\mathbb{Z}_2)^4$	0	0	0	0
18	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	0	0	0	0
19	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	0	$\mathbb{Z}_{11}$

Théorème (Périodicité d'Adams, 65)

π_k^s contient un facteur directe $\mathbb{Z}_{p^\ell}$ si $(k+1) = \omega_p . p^{\ell-1}.m$ avec $m \neq 0 \bmod p$ où

$$\omega_p := \begin{cases} 4 & si\ p = 2 \\ 2(p-1) & si\ p \neq 2 \end{cases}.$$

Notation : $\pi^s := \bigoplus_k \pi_k^s$

Questions : Pourquoi la périodicité en $2(p-1)$? D'autres périodicités ?

Théorème (Adams, Ravenel, Morava, Miller , Mahowald, Devinatz , Hopkins , Smith , etc (60-86) – version informalle)

*Soit p premier . Le localisé en p, noté $\pi^s_{(p)}$, est la **limite** (au sens des suites spectrales) d'éléments $2(p^n-1)p^m$-périodiques pour $n, m > 0$*

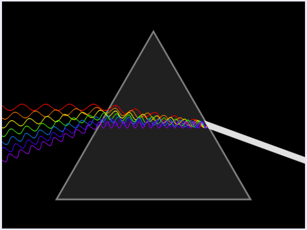
$2(p^n-1)p^m$

$\vdots$

$2(p^5-1)p^m$

$\vdots$

$2(p^1-1)p^m$

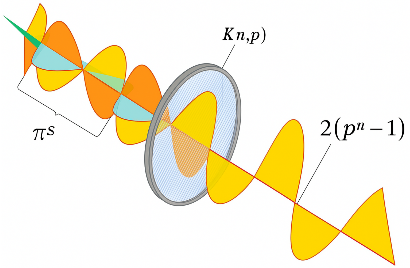


$\pi^s_{(p)}$

$\Rightarrow$

***Suite spectrale** chromatique*

Stratégie de Preuve : Pour chaque p et n, **isoler** la partie $2(p^n - 1)$-périodique.
Inventer une théorie cohomologique.



Les théories de Morava.

Reformulation dans la catégorie stable

Rappel : H la catégorie des CW-complexes pointés, morphisms à homotopie près.

$$[S^n, X]_{\mathbf{H}} = \pi_n(X)$$

Définition (Lima 58, Boardman 65, La catégorie homotopique stable)

$\mathbf{Sp} := \mathbf{H}[\Sigma^{-1}]$ inversion formelle de l'opération de suspension.

Les topologues l'appellent la catégorie des spectres.

Proposition (Boardman-Vogt 70)

Sp *est une catégorie triangulée.* $[n] = \Sigma^n$

Chaque CW-complexe pointé X donne un objet $X^{stb} \in \mathbf{Sp}$.

Définition

Le spectre en sphères $\mathbb{S} := (S^0)^{stb}$, $\qquad (S^k)^{stb} = \mathbb{S}[k]$.

Exemple

$$[\mathbb{S}[k], \mathbb{S}]_{\mathbf{Sp}} \simeq \lim_n [\Sigma^n S^k, \Sigma^n (S^0)]_{\mathbf{H}} \simeq \pi_k^s.$$

Reformulation dans la catégorie stable

Proposition (La sphère p-locale)

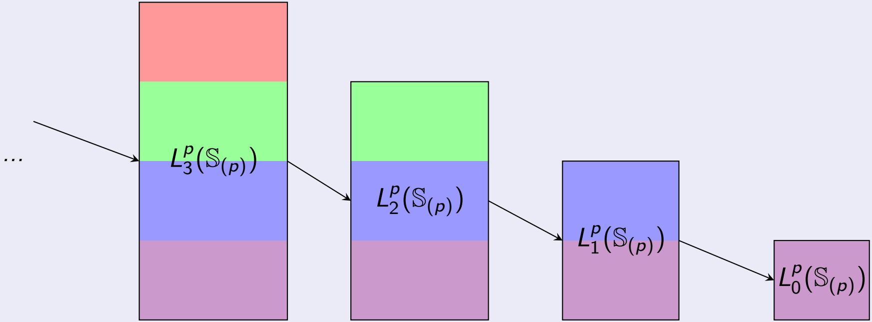
Soit p premier. Il existe un objet $\mathbb{S}_{(p)} \in \mathbf{Sp}$ dont $[\mathbb{S}[k], \mathbb{S}_{(p)}]_{\mathbf{Sp}} = \pi^s_{k,(p)}$.

Définition

On dit que $Y \in \mathbf{Sp}$ est d-périodique si $Y[d] \simeq Y$.

Théorème (Morava, Ravenel, Hopkins, etc, version formale)

*Soit p premier. Il existe une tour d'objets $L_n^p \in$ **Sp**,*



- *où chaque cône*

$$L_n^p(\mathbb{S}_{(p)}) \to L_{n-1}^p(\mathbb{S}_{(p)}) \to {\color{red}M_{n,p}}$$

  est monochromatique, c.à.d, une colimite filtrante d'objets $2(p^{\color{red}n} - 1)p^m$ –périodiques à ${\color{red}n}$ et p fixés.

- $\mathbb{S}_{(p)} \simeq \mathbf{holim}_n\, L_\bullet^p(\mathbb{S}_{(p)}) \simeq \mathbf{Tot}\ L_\bullet^p(\mathbb{S}_{(p)})$. *suite spectrale $\pi^s({\color{red}M_{n,p}}) \Rightarrow \pi^s_{(p)}$.*

But de l'exposé : Construire les L_n^p.

Catégorie stable et théories cohomologiques

Proposition

1. *Il existe un foncteur pleinement fidèle* $\mathrm{H} : \mathrm{Ab} \subseteq \mathbf{Sp}$ *;*
2. *Pour tout CW-complexe* X

$$[X^{stb}[-n],\ \mathrm{H}G\ ]_{\mathbf{Sp}} = \mathrm{H}^n(X, G).$$

Définition

$\forall p,\ L_0^p(\mathbb{S}_{(p)}) := \mathrm{H}\mathbb{Q}.$

D'autres théories cohomologiques ?

Définition (Eilenberg–Steenrod, 52)

Une **théorie cohomologique généralisée** c'est la donnée d'une famille de foncteurs $\mathrm{E} = \{\mathrm{E}^n : \mathrm{CW}_* \to \mathrm{Ab}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant : **invariance par homotopie**, **excision**, **suite exacte longue** et **additivité**.

Théorème (Brown62, Espaces d'Eilenberg–MacLane géneralisés)

Toute théorie cohomologique géneralisée E *est représenté par un objet* $\underline{\mathrm{E}}$ *de la catégorie stable*

$$\mathrm{E}^n(X) = [X^{stb}[-n], \underline{\mathrm{E}}\ ]_{\mathbf{Sp}}$$

et vice-versa :

$$\mathbf{Sp} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Théories cohomologiques} \\ \textit{en topologie algébrique.} \\ (\textit{ex} :\ \mathrm{H}^*, \mathrm{K}^*, \textit{Cobordism}) \end{array} \right\}$$

Pour les algébristes : $\mathbf{Sp}$ = motifs des CW-complexes.

Théories cohomologiques et groupes formels

Le mécanisme clé derrière les phénomènes de périodicité est un dictionnaire surprenant entre deux domaines :

$$\mathbf{Sp} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Théories cohomologiques} \\ \text{en topologie algébrique.} \\ (\textit{ex}: \ \mathrm{H}^*, \mathrm{K}^*, \text{Cobordism}) \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Groupes formels} \\ \text{en géométrie algébrique.} \\ (\textit{ex}: \ \text{additif, multiplicatif, etc.}) \end{array} \right\}$$

Lien : $\mathbb{CP}^\infty$, construit par recollement des cellules de dimension paire

$$\mathrm{pt} \hookrightarrow S^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^3 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbb{CP}^\infty$$

Proposition

$\mathbb{CP}^\infty$ *est muni du fibré en droites (complexes) universel* $\mathcal{E} := \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{CP}^\infty$

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{fibrés en droites complexes} \\ \mathcal{L} \ \textit{sur } X \end{array} \right\} \quad \underset{\sim}{\leftarrow} \quad [X, \mathbb{CP}^\infty]_{\mathbf{H}}$$

$$\mathcal{L} \simeq f^*(\mathcal{E}) \qquad\qquad f : X \to \mathbb{CP}^\infty$$

Exemple : cohomologie de $\mathbb{CP}^\infty$

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i \text{ paire} \\ 0 & i \text{ impaire} \end{cases}$$

Proposition

Le choix d'un générateur $t \in \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z})$ induit un isomorphisme d'anneaux gradués

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \prod_{i \text{ pair}} \mathbb{Z}.t^i \simeq \mathbb{Z}[[t]]$$

où $|t| = 2$.

Définition (Classes de Chern)

La **première classe de Chern** de $\mathcal{L}$ sur X, $c_1(\mathcal{L}) \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ donnée par

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$$

$$t \mapsto c_1(\mathcal{L}) := f^*(t),$$

Loi additive

Proposition

$$c_1(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) = c_1(\mathcal{L}_1) + c_1(\mathcal{L}_2) \qquad \textit{dans} \qquad \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$$

Observation

$\otimes$ *est classifié par une application universelle*

$$m : \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty \ \textit{avec} \qquad m^*(\mathcal{E}) \simeq \pi_1^*(\mathcal{E}) \otimes \pi_2^*(\mathcal{E})$$

π_1 *et* π_2 *les projections.*

Démonstration : Il suffit de traiter le cas universel. L'inclusion canonique

$$\mathbb{CP}^\infty \vee \mathbb{CP}^\infty \subseteq \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty$$

induit l'inverse du morphism de Künneth

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z})$$

□

Loi additive

Observation

On a un isomorphisme d'anneaux gradués.

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[[t_1, t_2]] \qquad |t_1| = |t_2| = 2$$

et la loi d'additivité se traduit par

$$\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \xrightarrow{m} \mathbb{CP}^\infty$$

$$\mathbb{Z}[[t_1, t_2]] \xleftarrow{m^*} \mathbb{Z}[[t]]$$

$$F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 \leftarrow t$$

$F(t_1, t_2)$ vérifie certains axiomes analogues à ceux d'une loi de groupe

Lois de groupes formels

Définition

R un anneau commutatif. Une **loi de groupe formel** de dimension 1 sur R est une série formelle

$$F(t_1, t_2) \in R[[t_1, t_2]]$$

qui vérifie les axiomes suivants :

1. **(Identité)** $F(t, 0) = F(0, t) = t$;
2. **(Commutativité)** $F(t_1, t_2) = F(t_2, t_1)$;
3. **(Associativité)** $F(t_1, F(t_2, t_3)) = F(F(t_1, t_2), t_3)$ dans $R[[t_1, t_2, t_3]]$.

Exemple

$F(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ est une loi de groupe formel sur $R = \mathbb{Z}$. On l'appelle la loi additive.

Conclusion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Théories cohomologiques} \\ \text{en topologie algébrique.} \end{array} \right\} \underset{\mathbb{CP}^\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{Groupes formels} \\ \text{en géométrie algébrique.} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{H}^* \mapsto F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 \text{ sur } \mathbb{Z}$$

Exemple : La K-théorie complexe

Définition

X un CW-complexe.

$$K^0(X) := \{\text{différences formelles } [V] - [W] \text{ de classes d'iso. de } \mathbb{C}\text{-fibrés sur } X\}$$

- $1 = [\text{fibré trivial de rang } 1]$.
- $0 = [0]$.
- $(K^0(X), \otimes, 1)$ est un anneau commutatif.

Exemple

- $K^0(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}$ *avec isomorphisme induit par le rang.*
- $K^0(S^1) \simeq 0$

Définition (K-théorie réduite)

(X, x) un espace pointé. On note $\widetilde{K}^0(X)$ le noyau de la restricton à x

$$x^* : K^0(X) \to K^0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$$

Periodicité de Bott

Construction

$\mathcal{O}(-1) \to \mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ *le fibré en droites tautologique. Posons*

$$H = [\mathcal{O}(-1)], \qquad \beta := H - 1 \text{ (\textbf{l'élément de Bott})}.$$

Suite exacte d'Euler

$$0 \to \mathcal{O}(-2) = \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = 0$$

Donc, on a un morphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}[H]/\beta^2 \to K^0(S^2)$$

Théorème (Periodicité de Bott)

1. *Ce morphism est un isomorphisme.*
2. $\tilde{K}^0(S^2) \simeq \mathbb{Z}.\beta$.
3. *Pour tout CW-complexe fini pointé* $\tilde{K}^0(X) \simeq \tilde{K}^0(\Sigma^2 X) \qquad a \mapsto \beta \bullet$

Periodicité de Bott

Exemple

- $\mathbb{Z} \overset{\beta}{\simeq} \tilde{K}^0(S^2) \overset{\beta}{\simeq} \tilde{K}^0(S^4) \overset{\beta}{\simeq} \tilde{K}^0(S^6) \overset{\beta}{\simeq} \cdots$
- $0 \simeq \tilde{K}^0(S^1) \overset{\beta}{\simeq} \tilde{K}^0(S^3) \overset{\beta}{\simeq} \tilde{K}^0(S^5) \overset{\beta}{\simeq} \cdots$

K-théorie comme théorie cohomologique

Construction

Pour les entiers négatifs, on pose :

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & \underbrace{K^{-n}(X)}_{:=\tilde{K}^0(\Sigma^n X_+)} & \cdots & \underbrace{K^{-3}(X)}_{:=\tilde{K}^0(\Sigma^3 X_+)} & \underbrace{K^{-2}(X)}_{:=\tilde{K}^0(\Sigma^2 X_+)} \arrow[ll, bend right, "\beta"'] & \underbrace{K^{-1}(X)}_{:=\tilde{K}^0(\Sigma^1 X_+)} \arrow[ll, bend left, "\beta"] & K^0(X) \arrow[ll, bend right, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

Grâce à la périodicité, $\{K^n\}_{n\leq 0}$ est un $\mathbb{Z}[\beta]$-module gradué, où $|\beta| = -2$.

Pour étendre aux entiers positifs, on pose

$$\{K^n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{K^n\}_{n\leq 0} \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} \mathbb{Z}[\beta^{\pm}]$$

K-théorie comme théorie cohomologique

Exemple

Pour $X = \mathrm{pt}$ *on obtient*

$$\cdots \quad \underbrace{K^{-2}(\mathrm{pt})}_{\tilde{K}^0(S^2)=\mathbb{Z}.\beta} \quad \underbrace{K^{-1}(\mathrm{pt})}_{\tilde{K}^0(S^1)=0} \quad \underbrace{K^0(pt)}_{\mathbb{Z}} \quad \underbrace{K^1(\mathrm{pt})}_{0} \quad \underbrace{K^2(\mathrm{pt})}_{\mathbb{Z}.\beta^{-1}} \quad \underbrace{K^3(\mathrm{pt})}_{0} \quad \underbrace{K^2(\mathrm{pt})}_{\mathbb{Z}.\beta^{-2}} \quad \cdots$$

Proposition

$K^* =: \{K^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une théorie cohomologique généralisée multiplicative.*

Exemple

$K^*(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}[\beta^{\pm}]$ *isomorphisme d'anneaux gradués.*

Loi multiplicative

La restriction le long de $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^\infty$ donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{K}^2(S^2) \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & \tilde{K}^0(S^2) \simeq \mathbb{Z}.\beta \\ \tilde{K}^2(\mathbb{CP}^\infty) \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & \tilde{K}^0(\mathbb{CP}^\infty) \arrow[u, two heads] \end{tikzcd} \qquad \mathcal{O}(-1) = \mathcal{E}_{|_{S^2}}$$

Proposition

Soit $t := \beta^{-1}([\mathcal{E}] - 1) \in \tilde{K}^2(\mathbb{CP}^\infty)$. Alors :

1. *t induit un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$K^*(\mathbb{CP}^\infty) \simeq K^*(\mathrm{pt})[[t]] \simeq \mathbb{Z}[\beta^\pm][[t]]$$

2. *La multiplication $m : \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ induit une loi de groupe formel sur $\mathbb{Z}[\beta^\pm]$*

$$m^*(t) = t_1 + t_2 + \beta.t_1t_2.$$

Démonstration : Utiliser $m^*(\mathcal{E}) \simeq \pi_1^*(\mathcal{E}) \otimes \pi_2^*(\mathcal{E})$, $m^*(t) = \beta^{-1}.m^*(\mathcal{E})$ et l'identité

$$xy - 1 = (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) \quad \square$$

Conclusion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Théories cohomologiques} \\ \text{en topologie algébrique.} \end{array} \right\} \underset{\mathbb{CP}^\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{Groupes formels} \\ \text{en géométrie algébrique.} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{H}^* \mapsto F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 \text{ sur } \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{K}^* \mapsto F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + \beta.t_1.t_2 \text{ sur } \mathbb{Z}[\beta^{\pm}]$$

Cas général

Définition

On dit qu'une TCG $\{\mathrm{E}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ admet une **orientation complexe** si la restriction

$$\tilde{\mathrm{E}}^2(\mathbb{CP}^\infty) \to \tilde{\mathrm{E}}^2(S^2) \simeq \tilde{\mathrm{E}}^1(S^1) \simeq \tilde{\mathrm{E}}^0(S^0) \simeq \mathrm{E}^0(\mathrm{pt})$$

est surjective. Un **choix** d'orientation complexe est le choix d'un antécédent de 1, t dans $\tilde{\mathrm{E}}^2(\mathbb{CP}^\infty)$.

Proposition

Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{E}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une TCG multiplicative avec t un choix d'orientation complexe. Alors t induit une loi de groupe formel sur $R = \mathrm{E}^*(\mathrm{pt})$

$$\mathrm{E}^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty) = \mathrm{E}^*(\mathrm{pt})[[t_1, t_2]] \xleftarrow{m^*} \mathrm{E}^*(\mathrm{pt})[[t]] = \mathrm{E}^*(\mathbb{CP}^\infty)$$

$$F(t_1, t_2) \leftarrow t$$

Dictionnaire

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Théories cohomologiques}\\ \text{géneralisées}\\ \text{(multiplicatives, avec orientation)}\end{array}\right\} \xrightarrow[\mathbb{CP}^\infty]{} \left\{\begin{array}{c}\text{(lois de) Groupes formels}\\ \text{en dimension 1}\\ \end{array}\right\}$$

Les phénomènes chromatiques proviennent du transfert des résultats de la classification des groupes formels par la **hauteur**.

Caractéristique nulle

Proposition

Soit F une loi de groupe formel sur une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors F est isomorphe à la loi additive par un changement de coordonnées ;

Exemple

En caractéristique nulle, l'exponentielle donne un isomorphisme entre la loi additive et la loi multiplicative.

Caractéristique positive

En caractéristique p les groupes formels sont organisés selon la taille de leur p-torsion :

- pas de p-torsion, hauteur $= 0$,
- tout est p-torsion, hauteur $= +\infty$.

Notation

F une loi de groupe formel sur R. On note $F^n(t)$ sa n-ième itérée :

$$F^2(t) = F(t,t) \qquad F^{n+1}(t) = F(F^n(t),t)$$

Définition

On note $\nu_n := \nu_{n,p}(F)$ les coefficients :

$$F^p(t) = p.t + \nu_1.t^p + \nu_2.t^{p^2} + \cdots + \nu_{n-1}.t^{p^{n-1}} + \nu_n.t^{p^n} + \cdots$$

On dit que F est de *hauteur* n en p si

$$p = \nu_{1,p}(F) = \cdots = \nu_{n-1,p}(F) = 0 \qquad \text{et } \nu_{n,p}(F) \in R^*$$

.

Hauteur

Exemple

- *Si* $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ *est la loi additive sur* $R = \mathbb{F}_p$ *:*

$$F^p(t) = p \cdot t = p \cdot t^{p^0} = 0 \qquad h_p(F) = +\infty$$

- *Si* $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + \beta \cdot t_1 t_2$ *sur* $R = \mathbb{F}_p[\beta^\pm]$ *:*

$$F^p(t) = \beta^{p-1} \cdot t^{p^1} \qquad \nu_1 := \beta^{p-1} \qquad h_p(F) = 1$$

Classification

Théorème (Honda, Lazard)

Soit k un corps de caractéristique positive. Alors :

1. *Pour tout entier $1 \leq n \leq \infty$, il existe une loi de groupe formel F de hauteur n sur k ;*
2. *Si $h_p(F) = +\infty$ alors F est isomorphe à la loi additive.*
3. *Si k est algébriquement clos, alors deux lois de groupes formels sur k sont isomorphes si et seulement si elles ont la même hauteur.*

Des groupes formels aux théories cohomologiques

Théorème (Quillen 69, Landweber 76)

Soit F une loi de groupe formel sur un anneau commutatif R. Supposons que, pour tout nombre premier p,

$$(\nu_{0,p}(F) = p, \nu_{1,p}(F), \nu_{2,p}(F), \ldots)$$

est une suite régulière dans R. Alors, il existe une TCG multiplicative $\mathrm{E}_F = \{\mathrm{E}_F^n\}$ avec une orientation complexe t telle que

$$\mathrm{E}^*(\mathrm{pt}) \simeq R \qquad F_{\mathrm{E}_F} = F$$

Cet enoncé constitue le cœur du sujet :

- (Quillen) La théorie cohomologique associée à la loi de groupe formel **universelle** est le **cobordisme complexe à la Thom**.
- La théorie E définie par Landweber s'obtient comme quotient du cobordisme complexe.

On obtient donc un dictionnaire :

$$\mathbf{Sp} \underset{\textit{Brown}}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{Théories cohomologiques} \\ \text{géneralisées} \\ \text{(multiplicatives, avec orientation)} \end{array} \right\} \underset{\text{Landweber}}{\overset{\mathbb{CP}^\infty}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{(lois de) groupes} \\ \text{formels} \\ \text{en dimension 1} \end{array} \right\}$$

Exemple : La cohomologie elliptique

Construction

$\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$ *avec* $\Delta = \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon) \neq 0$.

$$y^2 = R(x) = 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4 \subset \mathbb{CP}^2$$

détermine une courbe elliptique E *sur* $\mathbb{C}$ *avec loi de groupe formel :*

$$F_{\mathrm{Euler}}(t_1, t_2) = \frac{t_1\sqrt{R(t_2)} + t_2\sqrt{R(t_1)}}{1 - \varepsilon t_1^2 t_2^2}$$

On peut remplacer $\mathbb{C}$ *par l'anneau universel* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \varepsilon, \delta, \Delta^{-1}]$. *C'est de hauteur* 2 *si* E *est supersingulière et de hauteur* 1 *si* E *est ordinaire.*

Proposition (Landweber, Ravenel, Stong)

F_{Euler} *vérifie le critère de platitude de Landweber. La théorie cohomologique associée s'appelle la* ***cohomologie elliptique***.

Théories de Morava

Théorème (Morava89, Ravenel90)

Soit p premier. Pour tout $n \geq 1$, il existe des théories cohomologiques généralisées multiplicatives avec orientation complexe :

- ***Les K-théories de Morava** $K(n,p)$, avec*

$$K(n,p)^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{F}_p[\nu_n^{\pm 1}]$$

où $|\nu_n| = 2(p^n - 1)$ avec $F^p(t) = \nu_n t^{p^n}$, donc hauteur n.

- ***Les E-théories de Morava** $E(n,p)$, avec*

$$E(n,p)^*(\mathrm{pt}) = \widehat{\mathbb{Z}}_p[\nu_1, \cdots, \nu_{n-1}][\beta^{\pm}]$$

munie de la loi de Lubin-Tate.

Observation

$K(n,p)$ *est* $2(p^n - 1)$*-périodique.*

Exemple

$E(0,p) \simeq \mathrm{H}\mathbb{Q}[\beta^{\pm}]$

Exemple

$K(0,p) \simeq \mathrm{H}\mathbb{Q}$

Exemple

$E(1,p)$ *est la complétion de la K-théorie en p.*

Exemple

$K(1,p)$ *est la K-théorie modulo p , avec* $\nu_1 = \beta^{p-1}$ *la périodicité de Bott.*

Analogie : On a un diagramme cartesienn dans la catégorie dérivée des groupes abéliens

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{(p)} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathbb{Z}}_p \arrow[d] \\ \mathbb{Z}_{(p)}[\frac{1}{p}] \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}}_p[\frac{1}{p}] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}_{(p)}[\frac{1}{p}]$ et $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ sont des localisations : le premier par rapport à $\mathbb{Q}$ le deuxième, par rapport à $\mathbb{F}_p$.

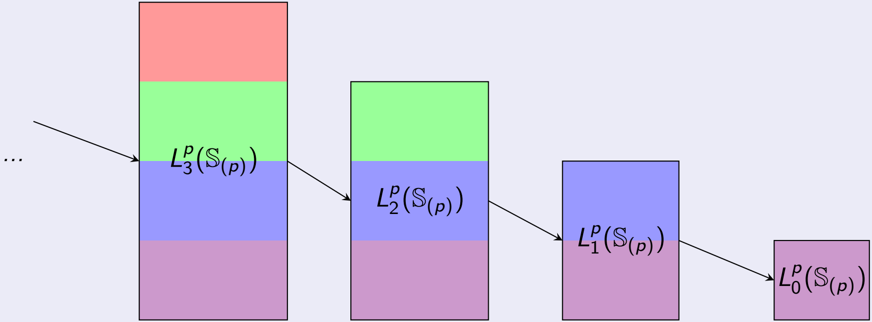
Théorème (Bousfield)

Il existe une opération dans **Sp** *de localisation $L_{E(n,p)}$. On pose*

$$L_n^p(\mathbb{S}_{(p)}) = L_{E(n,p)}(\mathbb{S}_{(p)})$$

Théorème (Morava, Ravenel, Hopkins, etc, version formalle)

Soit p premier. Il existe une tour d'objets $L_n^p \in \mathbf{Sp}$,



- *où chaque cône*

$$L_n^p(\mathbb{S}_{(p)}) \to L_{n-1}^p(\mathbb{S}_{(p)}) \to M_{n,p}$$

  est monochromatique, c.à.d, une colimite filtrante d'objets $2(p^n - 1)p^m$ –périodiques à n et p fixés.

- $\mathbb{S}_{(p)} \simeq \mathbf{holim}_n\, L_\bullet^p(\mathbb{S}_{(p)}) \simeq \mathbf{Tot}\ L_\bullet^p(\mathbb{S}_{(p)})$. *suite spectrale $\pi^s(M_{n,p}) \Rightarrow \pi^s_{(p)}$.*

Version 2025, via géométrie dérivée

Théorème (Lurie 2018, Gregoric 2021)

- *Il existe un champ dérivé spectral non connectif,* $\mathbf{M}_{\mathrm{fg}}^{\mathsf{or}}$*, classifiant les groupes formels (munis d'une orientation).*
- *Le foncteur des sections globales induit une équivalence d'*∞*-catégories*

$$\Gamma : \mathrm{IndCoh}(\mathbf{M}_{\mathrm{fg}}^{\mathsf{or}}) \underset{\sim}{\to} \mathbf{Sp}.$$

- *Pour chaque* p*, la filtration par la hauteur donne des sous-champs ouverts*

$$\mathbf{M}_{\mathrm{fg},p}^{\leq 1} \subset \mathbf{M}_{\mathrm{fg},p}^{\leq 2} \subset \cdots \subset \mathbf{M}_{\mathrm{fg},p}^{\mathrm{or}}.$$

- $\mathrm{Spf}(E(n,p))$ *est le complété formel de* $\mathbf{M}_{\mathrm{fg}}^{\mathsf{or}}$ *le long de l'unique loi de groupe formel de hauteur* n *sur* $\overline{\mathbb{F}_p}$*.*
- *L'opération* L_n^p *correspond à la restriction à l'ouvert* $\mathbf{M}_{\mathrm{fg},p}^{\leq n} \subseteq \mathbf{M}_{\mathrm{fg}}^{\mathsf{or}}$*.*
- *L'opération* $L_{K(n,p)}$ *est la complétion le long de l'inclusion* $\mathbf{M}_{\mathrm{fg},p}^{\heartsuit,=n} \subseteq \mathbf{M}_{\mathrm{fg}}^{\mathsf{or}}$*.*
- *Décomposition chromatique = décomposition adélique de* $\mathbf{M}_{\mathrm{fg}}^{\mathsf{or}}$*.*

Merci de votre attention.