Cahier d'exercices 2025-2026
M1: Topologie Algébrique
Sorbonne Université

Mise à jour du Friday 19 September, 2025- 22:59:

- L'annulation du cours du mardi 23 septembre est annulée, c'est-à-dire que le TD aura lieu comme prévu dans l'emploi du temps normal. Le calendrier des passages au tableau se déroulera selon l'ordre indiqué dans 0.
- Hypothèse dans l'exercice 2.5.
- Le TD du 18 septembre est annulé en raison de la grève.
- Exemple d'espace connexe mais non connexe par arcs 1.27.
- Exercice: l'adherence d'un connexe est connexe 1.15
- Les notes des passages au tableau sont disponibles sur Moodle.

Abstract

Ce fichier contiendra tous les exercices qui seront abordés en TD. Il sera mis à jour au fur et à mesure du semestre.

Contents

0 Fonctionnement des TDs et évaluation

La note des TD représente 40% de la note finale de l'UE, répartie comme suit :

- 20/40 pour un contrôle de 1h30 lors du TD du 4 novembre (CC1) ;
- 20/40 pour un contrôle de 1h30 lors du TD du 11 décembre (CC2) ;
- 20/40 pour des **passages au tableau** en TD (T) ;

La note finale des TD est déterminée par le maximum des combinaisons suivantes :

$$\mathrm{NOTE\ TD} = \max(\mathrm{CC1} + \mathrm{CC2}, \mathrm{CC1} + \mathrm{T}, \mathrm{CC2} + \mathrm{T})$$

Passages au tableau : Chaque semaine, une sélection d'exercices, tirés de cette liste et à résoudre pour les séances de la semaine suivante, sera publiée ici, accompagnée des noms des étudiant·e·s désigné·e·s pour les présenter. Chaque passage au tableau, au nombre de quatre par personne durant le semestre, sera noté entre 0 et 5 points. Les justificatifs d'absence ne seront pas acceptés.

Les appels au tableau commencent le jeudi 11 Septembre

Liste d'exercices pour les passages au tableau:

- Mardi 16 Septembre:
  - NINA, NINA Exercice 1.3;
  - LEMAUF, ARTHUR, Exercice 1.6
  - ESCABIAS, RAFAEL, Exercice 1.7- Question 1 et 2
  - NICASTRO, CARLO - Exercice 1.7- Question 3

- jeudi 18 septembre : PAS DE TD. À rattraper plus tard dans le semestre.

- mardi 23 septembre :
  - LITTLER, ANNIE Exercice 2.1;
  - MATUTE DE IMANA, ANGELA, Exercice 2.2
  - VILLIAUMEY, VINCENT - Exercice 2.3 - Questions 1, 2 et 3
  - AHO, LUDOVIC - Exercice 2.3- Questions 4 et 5

- jeudi 25 septembre:
  - CHARRIER, HUGO Exercice 2.4;
  - CARBALLO, VIRGILE, Exercice 2.5
  - DUBOIS, YANN - Exercice 2.6 -
  - BEJAR–MORAND, ROMAIN- Exercice 2.7
  - EDELINE, JEANNE - Exercice2.9

1 Topologie Générale

Exercice 1.1 (Quelques exemples).

1. Parmi les choix de (X, τ) ci-dessous, dire lesquels sont des espaces topologiques.
   (a) $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$.
   (b) $X = \{0, 1, 2\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$.
   (c) $X = \mathbb{R}$, τ est formé de $\emptyset$, X, et de toutes les parties de $\mathbb{R}$ dont le complémentaire est fini.
   (d) $X = [0, +\infty[$, τ est formé de $\emptyset$, X, et de tous les intervalles $]a, +\infty[$ avec $a \geq 0$.
   (e) $X = Y \cup \{a\}$ où Y est un espace topologique, et τ consiste en $\emptyset$ et en les $\{a\} \cup U$ où U est un ouvert de Y.
2. Parmi les espaces topologiques ci-dessus, lesquels sont connexes par arcs ? Connexes ? Quasi-compacts ? Séparés ?

Exercice 1.2. (Voir l'exercice 1.14 pour la définition de topologie produit) Soient X, Y, Z des espaces topologiques. On considère $X \times Y$ avec la topologie produit. Montrer qu' application $Z \to X \times Y$ est continue si et seulement si les deux projections $Z \to X \times Y \to X$ et $Z \to X \times Y \to Y$ sont continues.

Exercice 1.3. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

Exercice 1.4 (Considérations de stabilité). Parmi les propriétés de connexité, connexité par arcs, quasi-compacité, séparation, dire lesquelles sont stables par réunion, intersection, adhérence, intérieur, frontière, passage à un sous-espace fermé.

Exercice 1.5. Soit X un espace topologique et F_1, F_2 deux fermés de X, tels que $F_1 \cup F_2 = X$. Soit Y un espace topologique et $f_i \colon F_i \to Y$, pour $i = 1, 2$, deux applications continues, qui coïncident sur $F_1 \cap F_2$. Montrer que leur recollement définit une application continue $X \to Y$.

Exercice 1.6 (Compacité et régularité).

1. Vérifier que dans un espace topologique séparé, les singletons sont fermés.
2. On dit qu'un espace topologique (X, τ) est *régulier* s'il est séparé et si pour tout fermé F et tout singleton $\{x\}$ tel que $x \notin F$, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $F \subset V$. On dit que (X, τ) est *normal* si pour tous fermés F_1, F_2 disjoints, il existe deux ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $F_i \subset U_i$. Montrer que tout espace compact (*i.e.*, quasi-compact et séparé) est normal.

Exercice 1.7 (Quasi-compacité *versus* séparation (peu d'ouverts *versus* beaucoup d'ouverts)).

1. Soit X un espace topologique quasi-compact et $F \subseteq X$ un sous-ensemble fermé. Montrer que F est quasi-compact.
2. Soit X un espace topologique séparé et $F \subseteq X$ un quasi-compact. Montrer que F est fermé.

3. Soit $f\colon X \to Y$ une bijection continue. Montrer que si X est quasi-compact alors Y l'est aussi. Montrer que si Y est séparé alors X l'est aussi. Montrer que si X est quasi-compact et Y est séparé, alors f est un homéomorphisme.

4. Soit X un ensemble, et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement décroissante (pour l'inclusion) de topologies. Vérifier que si l'une d'entre elles est séparée (resp. quasi-compacte) alors les précédentes (resp. suivantes) le sont aussi. Discuter du cas où l'une d'entre elles est compacte.

Exercices complémentaires

Exercice 1.8. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ un sous-ensemble. Alors, A est ouvert si et seulement si pour tout point $x \in A$, il existe un ouvert U tel que

$$x \in U \subseteq A.$$

Définition 1.9 (Base d'une topologie)**.** Soit (X, τ) un espace topologique. On dit qu'une sous-collection $\beta \subseteq \tau$ forme une *base de la topologie* τ si chaque élément de τ peut être écrit comme une union d'éléments de β.

Exercice 1.10. Soit X un ensemble et soit β une collection de sous-ensembles de X satisfaisant les deux conditions suivantes :

(i) Pour chaque $x \in X$, il existe au moins un élément B de β contenant x ;

(ii) Si x appartient à l'intersection de deux éléments B_1 et B_2 dans β, alors il existe un troisième B_3 de β contenant x tel que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Montrer que la collection de sous-ensembles τ_β définie par

$$(*) \quad U \in \tau_\beta \quad \text{si et seulement si pour chaque } x \in U, \text{ il existe } B \in \beta \text{ tel que } x \in B \subseteq U$$

donne une topologie où β est une base. On l'appelle la topologie engendrée par β.

Exercice 1.11. Soit X un espace topologique et β une collection de sous-ensembles de X. On considère l'intersection de toutes les topologies qui contiennent β

$$\tau_\beta := \bigcap_{\beta \subseteq \tau,\ \tau \text{ topologie}} \tau$$

Montrer que:

1. τ_β est une topologie;

2. Lorsque β satisfait les conditions d'une base, alors cette définition de τ_β coïncide avec celle de l'exercice 1.10.

Exercice 1.12. Soit X un ensemble et β une collection de sous-ensembles de X satisfaisant uniquement la condition (i) de l'exercice 1.10. On pose $I(\beta)$ la collection de toutes les intersections finies des éléments de β. Montrer que $I(\beta)$ satisfait les conditions (i) et (ii) de l'exercice 1.10 et donc que $\tau_{I(\beta)}$ est une topologie.

Exercice 1.13. Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application d'ensembles. Supposons que la topologie de Y est de la forme τ_β comme dans l'exercice 1.10. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $B \in \beta, f^{-1}(B)$ est ouvert dans X.

Exercice 1.14. Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) des espaces topologiques. Soit $X \times Y$ le produit en théorie des ensembles. Nous définissons $\beta \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$, la collection des boîtes ouvertes :

$$\beta_{\text{box}} := \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

Montrer que la collection β_{box} satisfait les conditions (i) et (ii) de l'exercice 1.10. On appelle $\tau_{\beta_{box}}$ la topologie produit.

Exercice 1.15. Soient $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \subseteq X$ et supposons que A est connexe pour la topologie de sous-espace. Montrer que B est connexe pour la topologie de sous-espace.

Exercice 1.16. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$:

1. est connexe;
2. est quasi-compact.

Exercice 1.17. Montrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue de X vers l'ensemble $\{0, 1\}$, muni de la topologie discrète, est constante.

Exercice 1.18. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la collection β des boules ouvertes, c'est-à-dire tous les sous-ensembles de la forme

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

avec x parcourant tous les points de X et $r \in \mathbb{R}$, avec $r > 0$, satisfait les conditions (i) et (ii) dans l'exercice 1.10.

Exercice 1.19. Soit (X, τ) un espace topologique et $S \subset X$ un sous-ensemble. Montrer que la collection des sous-ensembles de S définie par

$$\tau|S := \{S \cap U : U \in \tau\}$$

définit une topologie sur S. On l'appelle la topologie *sous-espace*.

Exercice 1.20. Soit $f : X \to Y$ une application continue et $A \subset X$ un sous-espace. Alors la restriction $f|_A : A \to Y$, où A est muni de la topologie sous-espace, est continue.

Exercice 1.21. Soit X un ensemble et τ_1 et τ_2 des topologies sur X. On suppose que τ_1 est engendrée par une base β_1 et τ_2 est engendrée par une base β_2. On suppose que pour chaque $x \in X$ et pour chaque $B_2 \in \beta_2$ contenant x, il existe $B_1 \in \beta_1$ tel que $x \in B_1 \subseteq B_2$. Montrer que $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Exercice 1.22. Utiliser l'exercice 1.21 pour montrer que la topologie de $\mathbb{R}^n$ donnée par la métrique usuelle de l'exercice 1.18 coïncide avec la topologie produit.

Exercice 1.23. Montrer que le produit cartésien de deux espaces séparés est séparé.

Exercice 1.24. Montrer que le produit cartésien $X \times Y$ de deux espaces quasi-compacts est quasi-compacts. (Suggestion : commencer par montrer que si $N \subseteq X \times Y$ est un sous-ensemble contenant un sous-ensemble de la forme $\{x\} \times Y$, alors il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que $W \times Y \subseteq N$)

Définition 1.25. Si X et Y sont des ensembles, on considère leur union disjointe

$$X \coprod Y := (X \times \{0\}) \bigcup (Y \times \{1\})$$

On note $i_X : X \to X \coprod Y$ et $i_Y : Y \to X \coprod Y$ les deux inclusions. Une paire d'applications d'ensembles $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ définit de manière unique une application $X \coprod Y \to Z$ envoyant un élément $a \in X \coprod Y$ vers $f(a)$ si a appartient à X, et vers $g(a)$ si a appartient à Y.

Exercice 1.26. Si (X, τ_X) et (Y, τ_Y) sont des espaces topologiques, on considère la collection suivante pour l'union disjointe $X \sqcup Y$:

$$\tau := \{A \in \mathcal{P}(X \sqcup Y) : i_X^{-1}(A) \in \tau_X,\, i_Y^{-1}(A) \in \tau_Y\}$$

Montrer que:

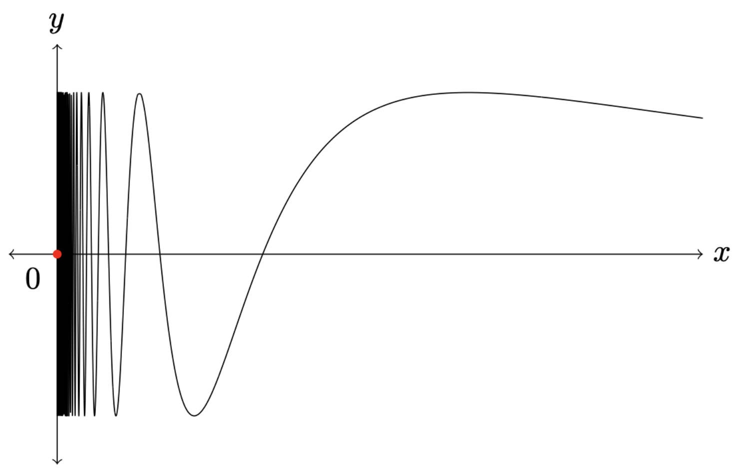
1. τ est une topologie
2. que les deux inclusions $i_X : X \to X \sqcup Y$ et $i_Y : Y \to X \sqcup Y$ sont continues.
3. Une application $f : X \sqcup Y \to Z$ est continue si et seulement si $f \circ i_X$ et $f \circ i_Y$ sont continues.

On appelle $X \sqcup Y$ l'union disjointe.

Exemple 1.27. (Espace connexe, non connexe par arcs) Considérons l'union

$$X = \{(0,0)\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(\frac{1}{x}), x > 0\}$$

munie de la topologie de sous-espace:



(Source). Alors

- X est connexe : En effet, l'espace $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(\frac{1}{x}), x > 0\}$ est l'image de l'application continue $\sin(1/t) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. D'après le résultat du TD, on sait que $\mathbb{R}$ est connexe, donc en utilisant l'homéomorphisme donné par le logarithme réel $\log : \mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{R}$, on établit que $\mathbb{R}_{>0}$ est connexe. L'ensemble X est tel que $A \subseteq X \subseteq \overline{A}$ avec A connexe donc par l'exercice eq. (1.15), X est donc connexe.

- X n'est pas connexe par arcs : Supposons qu'il existe un chemin continu γ avec $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1)$ situé sur le graphe. Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée (coordonnée en x). À un certain moment t_0, le chemin γ doit passer d'une coordonnée x égale à 0 à une coordonnée strictement positive.

$$t_0 := \inf\{t \in [0,1] : \pi_1(\gamma(t)) > 0\}$$

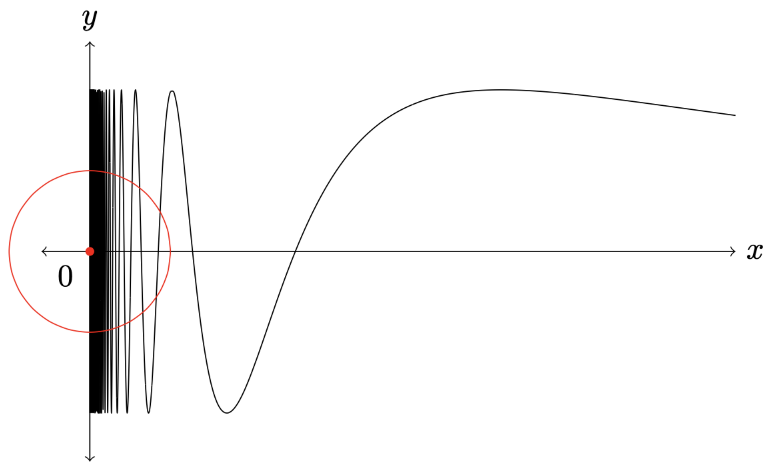
Remarquons que l'infimum existe puisque cet ensemble est, par hypothèse, non vide et borné inférieurement par $t = 0$.

Pour $t < t_0$, on a $\pi_1(\gamma(t)) = 0$. Par continuité à gauche en t_0, il en découle que $\pi_1(\gamma(t_0)) = 0$, donc $\gamma(t_0) \in \{0\} \times [-1,1]$.

En même temps, puisque γ est continue en t_0, d'après la définition ϵ-δ de la continuité, on a pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t : \, t_0 \leq t < t_0 + \delta \Rightarrow d(\gamma(t), (0,0)) < \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire que pour tout t légèrement supérieur à t_0, $\gamma(t)$ doit appartenir à une petite boule de rayon $\frac{1}{2}$:



Par définition de t_0 comme infimum, il existe un t_1 avec $t_0 < t_1 < t_0 + \delta$ tel que $\pi_1(\gamma(t_1)) > 0$. Par continuité, l'image $\pi_1(\gamma([t_0, t_1]))$ est un intervalle connexe dans $\mathbb{R}$, noté $[0, a]$, avec $0 = \pi_1(\gamma(t_0))$ et $a := \pi_1(\gamma(t_1))$. Mais comme on peut le voir sur l'image, pour progresser vers la droite du graphe, le chemin devra sortir de la boule un nombre infini de fois pour atteindre sin $= 1$ et sin $= -1$. Cela se produit pour des valeurs de x arbitrairement petites à l'intérieur de la boule, un nombre infini de fois. En particulier, on voit que pour les valeurs $\pi_1(\gamma(t))$ (telles que celles entre t_0 et t_1), on ne peut jamais obtenir tout l'intervalle $[0, a]$ — pour cela, il faudrait atteindre des valeurs de la fonction sinus situées en dehors de la boule.

2 Topologie Quotient

Exercice 2.1 (Topologie quotient - voir les exercices complémentaires 2 pour des révisions sur la notion de relation d'équivalence)**.**

Soit (X, τ) un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $p\colon X \to X/\sim$ l'application canonique. Pour $S \subset X$ on appelle *saturé* de S le sous-ensemble $p^{-1}(p(S)) = \{y \in X, \exists x \in X, x \sim y\}$.

1. On définit $\tau' \subset \mathcal{P}(X/\sim)$ par la condition : $V \in \tau'$ si et seulement si $p^{-1}(V) \in \tau$. Montrer que cela définit une topologie sur $X/\sim$, qui rend p continue.
2. Montrer que p est ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert est ouvert.
3. Montrer que pour toute application $f\colon X \to Y$ continue et constante sur les classes d'équivalence, il existe une unique application continue $\overline{f}\colon X/\sim$ telle que $f = \overline{f} \circ p$. Montrer qu'à homéomorphisme canonique près, $(X/\sim, \tau')$ est l'unique espace topologique qui satisfasse cette propriété.

Exercice 2.2 (Topologie quotient et séparation)**.** On reprend les notations de l'exercice 2.1.

1. Montrer que si le graphe $\{(x, y) \in X \times X, x \sim y\}$ de la relation est fermé et si p est ouverte, alors $X/\sim$ est séparé.
2. Montrer que si X est compact et si le graphe de $\sim$ est fermé, alors $X/\sim$ est compact.
3. Donner un exemple d'espace topologique compact X et de relation $\sim$ telles que toutes les classes d'équivalences soient compactes, mais telle que $X/\sim$ ne soit pas séparé.
4. (Plus gros quotient séparé) Si (X, τ) est un espace topologique, on note $\mathcal{R}_s$ l'ensemble des relations d'équivalence $\sim$ sur X telles que $X/\sim$ est séparé. On définit $\sim_s$ par $x \sim_s y$ si pour tout $\sim \in \mathcal{R}_s$, $x \sim y$. Montrer que $\sim_s$ est une relation d'équivalence, et que le quotient $X/\sim_s$ est séparé. Montrer qu'il vérifie une propriété universelle, dans l'esprit de la question 3 de l'exercice 2.1.

Exercice 2.3 (Exemples de quotients)**.**

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa topologie usuelle et on pose $(x, y) \sim (x', y')$ si $x = x'$. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence, et identifier la topologie quotient.
2. On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle et on pose $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence, et identifier la topologie quotient.
3. Donner un exemple d'espace non séparé et d'une relation $\sim$ tels que $X/\sim$ soit séparé.
4. (La droite à deux origines) On munit $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$ de la topologie usuelle, et on pose $(x, y) \sim (x', y')$ si $(x, y) = (x', y')$ ou si $x = x' \neq 0$. Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Montrer que tout point du quotient $D = X/\sim$ admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}$. L'espace D est-il séparé ?
5. Montrer que le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation engendrée par $(x, y) \sim (2x, 2y)$ n'est pas séparé alors que le quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par la même relation l'est.

Exercice 2.4 (Groupes et topologie)**.** Un groupe topologique est un groupe $(G, *)$ munie d'une topologie pour laquelle les applications $G \times G \to G, (x, y) \mapsto x*y$ et $G \to G, x \mapsto x^{-1}$ sont continues.

1. Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Montrer que si H est ouvert, alors il est fermé.

2. Montrer que G est séparé si et seulement si le singleton $\{1\}$ est fermé.

3. Montrer que si G est connexe, alors il est engendré par tout voisinage de 1.

4. Montrer que la composante connexe G_0 de 1 est un sous-groupe fermé et distingué.

5. Soit H un sous-groupe discret et distingué d'un groupe topologique connexe G. Montrer que H est contenu dans le centre de G.

6. Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Montrer que G/H est séparé si et seulement si H est fermé.

Exercice 2.5. Soit X un espace topologique et soit G un groupe agissant sur X de façon continue, ie, l'application $G \times X \to X$ donnée par $(g, x) \mapsto g.x$ est continue. On définit une relation sur X en déclarant que $x \sim y$ s'il existe $g \in G$ tel que $y = g(x)$.

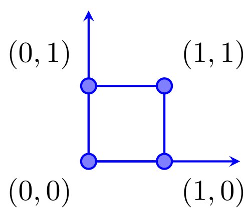
1. Montrer que cela définit une relation d'équivalence sur X.

2. Soit $p : X \to X/G$ l'application quotient. Montrer que si U est un ouvert de X, alors :
$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U).$$

3. En déduire que l'application quotient est une application ouverte.

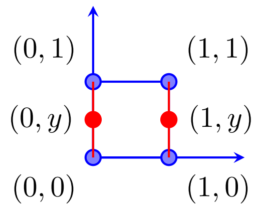
Exercice 2.6. Montrer que le (groupe) quotient[1] $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace topologique compact. Montrer que l'application $\phi \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ définie par $\phi(t) = e^{2i\pi t}$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

Exercice 2.7. Considérons le carré $X := [0, 1] \times [0, 1]$ comme un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle, représenté comme suit :

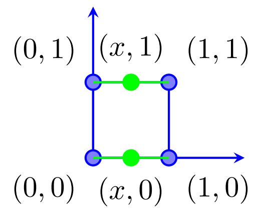


On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ imposant les identifications suivantes: d'abord, un point de la forme $(0, y)$ doit être identifié au point $(1, y)$:

[1] Prendre garde à l'ambigüité entre le quotient de groupes, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, considéré ici, et le quotient d'espaces topologiques $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, bouquet infini de cercles, que nous étudierons dans un autre exercice.



Ensuite, un point de la forme $(x, 0)$ doit être identifié au point $(x, 1)$:



Plus précisément, on définit $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ comme l'union des ensembles suivants :

$$\mathcal{R}_1 = \{((x, y), (z, w)) : x = 0, y = w, z = 1\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{((x, y), (z, w)) : x = z, y = 0, w = 1\}$$

et de la diagonale Δ. Montrer que

1. $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \Delta$ définit une relation d'équivalence sur X. On note $X/\mathcal{R}$ l'espace quotient.
2. $X/\mathcal{R}$ est quasi-compact.
3. L'inclusion $X \subseteq \mathbb{R}^2$ rend la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ compatible avec celle associée au sous-groupe additif $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.
4. L'application quotient induite $X/\mathcal{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est une bijection continue.
5. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un espace de Hausdorff.
6. L'application quotient $X/\mathcal{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un homéomorphisme.
7. L'application $(\exp, \exp) : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ passe au quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et induit un homéomorphisme.

Exercice 2.8. Montrer que l'espace quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (on a identifié x et $y \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}^n$), le *tore de dimension* n, est homéomorphe au produit de n copies de S^1.

Exercice 2.9. L'*espace projectif réel* de dimension n, $\mathbb{R}P^n$, est défini comme le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$.

1. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est séparé.
2. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe au cercle S^1.

4. Montrer que $\mathbb{R}P_n$ est homéomorphe au quotient de S^n par la relation antipodale: $x \sim y$ si $x = \pm y$. En déduire que $\mathbb{R}P^n$ est compact.

   Voici une vidéo illustrant le plan projectif réel ($n = 2$) :

Exercice 2.10. Le *ruban de Möbius* M est défini comme le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, -y)$.

1. Montrer que M est séparé.
2. Montrer que M est homéomorphe au quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par la relation $(0, y) \sim (1, 1 - y)$. En déduire que M est compact.

Exercice 2.11. La *bouteille de Klein* K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence définie par les identifications $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$.

1. Montrer que K est séparé
2. Montrer que K est homéomorphe au quotient de $[0, 1]\times[0, 1]$ par la relation d'équivalence $(0, y) \sim (1, y)$ pour tout $y \in [0, 1]$ et $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
3. En déduire que K est compact.

Exercices complémentaires

Définition 2.12. Soit X un ensemble. Une relation d'équivalence sur X est un sous-ensemble $R \subseteq X \times X$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

- Identité : R contient le sous-ensemble diagonal Δ ;
- Symétrie : si $(x, y) \in R$, alors $(y, x) \in R$;
- Transitivité : si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$, alors $(x, z) \in R$;

Étant donné une relation d'équivalence R sur X, on considère l'ensemble X/R des classes d'équivalence $[x]$, où $[x] = [y]$ si et seulement si $(x, y) \in R$. On note $\pi : X \to X/R$ la fonction qui envoie $x \in X$ sur sa classe $[x]$.

Exercice 2.13. Soit $f : X \to Y$ une application d'ensembles. Montrer que:

1. le sous-ensemble $R \subseteq X \times X$ défini par
$$R = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$$
définit une relation d'équivalence sur X.
2. L'application $f : X \to Y$ se factorise par l'ensemble quotient
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr] & X/R \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$
3. L'application $\tilde{f}$ est injective.
4. L'application $\tilde{f}$ est surjective si et seulement si f est surjective.
5. En déduire que tout application d'ensembles $X \to Y$ surjective, est une application quotient.

Exercice 2.14. Soit X un ensemble.

(i) Soit $\{R_i\}_{i\in I}$ une famille de relations d'équivalence sur X. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i\in I} R_i \subseteq X \times X$ définit une relation d'équivalence sur X.

(ii) Soit $S \subseteq X \times X$ un sous-ensemble. On définit $\langle S\rangle \subseteq X \times X$ de la manière suivante : $(x, y) \in \langle S\rangle$ si et seulement s'il existe $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$, avec $x_0 = x$, $x_{n+1} = y$, tel que, soit :

- $x_i = x_{i+1}$,
- $(x_i, x_{i+1}) \in S$,
- $(x_{i+1}, x_i) \in S$.

Montrer que $\langle S\rangle$ définit une relation d'équivalence sur X.

(iii) Montrer que si R est une relation d'équivalence et $S \in R$, alors $\langle S\rangle \subseteq R$.

(iv) Conclure que
$$\langle S\rangle = \bigcup_{S\subseteq R : R \text{ est une relation d'équivalence}} R.$$
On appelle $\langle S\rangle$ la relation d'équivalence engendrée par S.

3 Recollements

Exercice 3.1 (Identifications et recollements)**.**

1. (Identification) Soit X un espace topologique, A une partie de X et $f\colon A \to X$ une application continue. On considère, sur X, la relation déquivalence engendrée par : $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$. Le quotient $X/\sim$ est noté aussi X/f. Si f est une application constante à valeur dans A, on le note aussi X/A.

   (a) Montrer que si X est compact et A est fermé, alors X/A est compact.

   (b) Si $X = [0,1]$ et $A = [0,1[$, identifier l'espace X/A à un espace vu plus haut dans cette feuille d'exercices.

   (c) Montrer que le cercle S^1 est homéomorphe à l'espace topologique quotient $[0,1]/\{0,1\}$.

2. (Recollement) Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X, et $f\colon A \to Y$ une application continue. Le *recollement de X sur Y par f* est le quotient de l'espace topologique $X \cup Y$ par la relation $\sim$ engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$. On le note $X \cup_f Y$.

   (a) Montrer que si X et Y sont connexes (resp. connexes par arcs) et si A est non vide, alors $X \cup_f Y$ est connexe (resp. connexe par arcs).

   (b) Montrer que si A est fermé et si X et Y sont séparés, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$.

   (c) Soit $X = Y = D^2$ le disque unitaire de dimension 2, avec $A = S^1 = \partial D^2 \subseteq X$. Decrire le recollement de X sur Y le long de l'application $f : A \to Y$ donne par l'inclusion du bord.

Exercice 3.2 (Cônes et suspensions)**.**

1. Soit X un espace topologique. On appelle *cône sur X* l'espace $C(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$.

   (a) Montrer que X s'identifie à un sous-espace fermé de $C(X)$ (la "base" du cône). Montrer que si X est séparé alors $C(X)$ l'est aussi.

   (b) Montrer que tout $f\colon X \to Y$ continue induit une application $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ continue.

   (c) Montrer que le cône $C(S^n)$ est homéomorphe à D^{n+1}, la boule unité fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Si X est un espace topologique, on appelle *suspension de X* l'espace $S(X) = (X \times [0,1])/\sim$, où $\sim$ est obtenue en identifiant tous les points de $X \times \{0\}$ en un point et ceux de $X \times \{1\}$ en un autre point.

   (a) Montrer que X s'identifie à un sous-espace fermé de $S(X)$. Montrer que si X est séparé alors $S(X)$ est séparé.

   (b) Montrer que toute application continue $f\colon X \to Y$ induit une application $S(f)\colon S(X) \to S(Y)$ continue.

   (c) Montrer que $S(X)$ peut être obtenue comme le recollement de deux copies du cône $C(X)$ le long de X.

(d) Montrer que la suspension $S(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1}.

Exercice 3.3 (Un collage classique)**.** Montrer que S^3 est obtenue en recollant deux "tores pleins" $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \to^{\mathrm{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

Indication: On identifiera S^3 au sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et les tores pleins aux sous-ensembles définis par $|z_1| \leq |z_2|$ et $|z_1| \geq |z_2|$.

Définition 3.4. Un espace X est dit *localement compact* s'il est séparé et si chaque point admet un voisinage compact, c'est-à-dire : pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U et un sous-ensemble compact K tels que $x \in U \subseteq K$.

Exercice 3.5 (Compactifié d'Alexandroff)**.** Soit X un espace topologique localement compact. On note $\widehat{X}$ l'espace X auquel on adjoint un point noté ∞.

1. Montrer que $\widehat{X}$ possède une unique topologie telle que
   - la topologie induite sur X soit la topologie de X
   - les voisinages ouverts de ∞ sont les ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour $K \subset X$ compact.

   Démontrer que $\widehat{X}$ est compact.
2. Montrer que $\widehat{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à S^n (Considérer la projection stéréographique).
3. Soit M la *bande de Möbius* de l'exercice 2.10. Identifier l'espace $\widehat{M}$ avec le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ (défini dans l'exercice 2.9).

Exercice 3.6. On définit l'*espace projectif complexe de dimension* n - $\mathbb{C}P^1$ - comme le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ par la relation : $x \sim y$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $x = \lambda y$. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à la sphère S^2.

Exercice 3.7 (Boucles, bouquet de cercles ...)**.** On considère les espaces topologiques quotients $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ par le sous-espace $\mathbb{Z}$ et

$$B = S^1 / \big(\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\, n \in \mathbb{N}^*\}\big),$$

ainsi que les sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion R_1 des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0,0)$ à l'axe $y = 0$, la réunion R_2 des cercles de rayon[2] $1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0,0)$ à l'axe $x = 0$ et enfin l'espace $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ donné par le recollement de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \to \{pt\}$ où F est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle). Dire lesquels parmi ces espaces sont homéomorphes entre eux.

[2] on l'appelle parfois espace des boucles hawaiennes

4 Homotopies

Exercice 4.1. Soient X et Y deux espaces topologiques.

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Montrer que si f et g sont homotopes alors leurs images sont dans la même composante connexe par arcs

2. On suppose Y contractile. Montrer que deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont toujours homotopes.

3. Montrer qu'un espace topologique X est contractile si et seulement si pour tout espace topologique Y, toute application continue $f : X \to Y$ est homotope à une application constante. Montrer aussi que X est contractile ssi pour tout espace topologique Y, toute application continue $f : Y \to X$ est homotope à une application constante.

4. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)|$ (en norme euclidienne) alors f et g sont homotopes.

5. Soit $n \geq 1$. Montrer que tout application continue non-surjective $X \to S^n$ est homotope à une application constante.

6. Soit $n \geq 1$. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to S^n$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < 2$ alors f et g sont homotopes. En déduire qu'une application continue sans point fixe $S^n \to S^n$ est homotope à l'application $x \mapsto -x$

Exercice 4.2 (Équivalences d'homotopie)**.**

1. Montrer que le ruban de Moebius M (voir eq. (3.5)) a le même type d'homotopie que S^1.

2. Si X et X', resp. Y et Y' sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrer que les produits $X \times Y$ and $X' \times Y'$ ont le même type d'homotopie.

3. Soit C un espace contractile et soit X un espace topologique. Montrer que $X \times C$ a le même type d'homotopie de X.

4. Montrer qu'une application continue homotope à une équivalence par homotopie et une équivalence par homotopie.

Exercice 4.3 (Type d'homotopie d'un complémentaire)**.**

1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$ avec $k < n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que S^{n-k-1}.

2. Soit C un sous-ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que S^{n-1}.

3. Soit X un espace topologique et soient A et B deux sous-espaces de X. Montrer que l'on peut avoir A et B homotopique équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.

4. Montrer que le tore privé d'un point a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles.

Exercice 4.4 (Cônes et homotopie)**.** On rappelle que le *cône sur un espace topologique* X est le quotient $C(X) = (X \times [0,1])/\sim$ où on a identifié tous les points de deuxième coordonnée 1. On a un plongement naturel $X \to C(X)$, $x \mapsto [(x, 0)]$.

1. Soit X un espace topologique. Montrer que $C(X)$ est contractile.

2. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une constante si et seulement si elle admet un prolongement continu à $C(X)$.

   En déduire la caractérisation suivante : un espace connexe par arcs X est simplement connexe si et seulement si toute application continue $S^1 \to X$ se prolonge au disque unité D.

3. (Difficile !) Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, on définit la *bernique de* f comme le recollement $B(f) = C(X) \cup_{f\times\{0\}} Y$. Montrer que si deux applications f, g sont homotopes alors leurs berniques sont homotopiquement équivalentes.

Exercice 4.5 (Configurations de trois points distincts dans $\mathbb{C}$)**.**

1. Montrer que $\mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\}$ se rétracte par déformation sur l'ensemble X formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon $1/2$.

2. Montrer que $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation sur S^1 identifié à l'ensemble des couples $(0, u)$ pour $u \in S^1$.

3. Montrer que $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{distincts}\}$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times X$ identifié à l'ensemble des triplets $(0, u, uv)$ pour $u \in S^1$ et $v \in X$.

Exercice 4.6. Soit X un espace connexe par arcs non vide. Montrer que sont équivalentes:

1. X est simplement connexe,

2. toute application du cercle dans X s'étend continûment au disque,

3. toute application du cercle dans X est homotope à une application constante,

4. deux chemins quelconque reliant les deux mêmes points sont homotopes.

Exercices complémentaires

Exercice 4.7. Soient X et Y des espaces topologiques. On note $\mathsf{Map}(X,Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de X vers Y. Étant donné un sous-ensemble compact K de X et un ouvert U de Y, on note

$$W(K,U) := \{f \in \mathsf{Map}(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

et l'on considère la collection de sous-ensembles de $\mathsf{Map}(X,Y)$ définie par :

$$\beta := \{W(K,U) : K \text{ compact dans } X,\ U \text{ ouvert dans } Y\}$$

Montrer que β vérifie la conditions (i) de l'exercice 1.10. On peut donc consider la topologie $\tau_{I(\beta)}$ donnée par l'exercice 1.12. On l'appele la topologie compacte-ouverte sur $\mathsf{Map}(X,Y)$.

Exercice 4.8. Soit X un espace localement compact. Montrer que pour tout point $x \in X$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe un voisinage ouvert V tel que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

avec $\overline{V}$ compact.

Exercice 4.9. Soit X un espace localement compact. Utiliser les exercices 1.8 et 4.8 pour montrer que l'*application d'évaluation*

$$E : \mathsf{Map}(X, Y) \times X \to Y \qquad (f, x) \mapsto f(x)$$

est continue pour la topologie compacte-ouverte.

Exercice 4.10. Supposons que X est localement compact. Utiliser l'exercice 1.24 pour montrer qu'une application $Z \to \mathsf{Map}(X, Y)$ est continue si et seulement si la composition avec l'application d'évaluation

$$Z \times X \to \mathsf{Map}(X, Y) \times X \to Y$$

est continue.

Exercice 4.11 (Topologie compacte ouverte et homotopies)**.** Soient X et Y des espaces localement compactes.

1. Montrer que les homotopies entre applications de X dans Y sont en bijection avec les chemins dans $\mathsf{Map}(X, Y)$ muni de la topologie compacte ouverte.

2. Soit X un espace topologique et soit x un point de X. On note $P_x X = \{f : [0, 1] \to X, f(0) = x\}$ l'*espace des chemins continus* (issus de x) que l'on munit de la topologie *compacte-ouverte*. Montrer que $P_x X$ est contractile.

5 Groupe Fondamentale et Théorème de van Kampen

Exercice 5.1 (Homotopie libre)**.** Soit X un espace topologique connexe par arcs non vide et x un point de X. On appelle *lacet basé en* x une application continue $f\colon [0,1] \to X$ vérifiant $f(0) = f(1) = x$, et *lacet libre* une application f vérifiant seulement $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres f_0, f_1 sont dits *librement homotopes* s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que pour tout $t \in [0,1]$ on ait $H(t,0) = f_0(t)$, $H(t,1) = f_1(t)$ et $H(0,t) = H(1,t)$.

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X,x)$.

Exercice 5.2. Montrer qu'un espace topologique grossier, et que la paire connexe, sont simplement connexes.

Exercice 5.3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\pi_1(S^n) = 0$

Exercice 5.4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.

Exercice 5.5. Montrer que toute application continue $f : D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

Exercice 5.6. Soit $(X_i, x_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés. Montrer que les groupes $\pi_1(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I})$ et $\prod_{i\in I} \pi_1(X_i, x_i)$ sont isomorphes.

Exercice 5.7. Montrer que le groupe fondamental d'une surface Σ_g compacte connexe, qui est somme connexe de $g \geq 0$ tores, admet une presséntation

$$< a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g : [a_1, b_1].[a_2, b_2]. \cdots [a_g, b_g] = 1 >$$

Exercice 5.8. Le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ est, par définition, le quotient de S^2 par la relation antipodal $x \sim -x$.

1. Montrer que le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe au quotient de D^2 par la relation antipodal sur le bord $\partial D^2 = S^1$.
2. Montrer que $\mathbb{R}P^2$ privée d'un point admet une retraction par déformation vers l'image de ∂D^2. On vérifiera soigneusement les continuités.
3. Montrer par le thèorème de Seifert-Van Kampen que $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}/2$.

Exercice 5.9. Montrer que le groupe fondamental d'une surface Σ'_g compacte connexe, qui est somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs $\mathbb{R}P^2$, admet une présentation

$$< a_1, \cdots, a_g : a_1^2.a_2^2 \cdots a_g^2 = 1 >$$

Exercice 5.10. Montrer que le complementaire d'un nombre fini de points dans $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe si $n \geq 3$.

Exercice 5.11 (À propos de Seifert-Van Kampen)**.** Trouver un espace topologique X et deux parties (peut-être pas ouvertes !) U et V tels que $X = U \cup V$, de sorte que U, V et $U \cap V$ soient simplement connexes, sans que X le soit.

Exercice 5.12 (Eckmann-Hilton)**.**

1. Soit M un ensemble. On suppose que M est équipé de deux produits

$$*: M \times M \to M \quad , \quad \bullet : M \times M \to M$$

vérifiant les conditions suivantes:

- Chaque loi admet une unité 1_* et $1_\bullet$, respectivement.
- L'application $*: M \times M \to M$ est compatible avec l'óperation $\bullet$, i.e.,

$$(x \bullet x') * (y \bullet y') = (x * y) \bullet (x' * y')$$

   (a) Montrer que $1_* = 1_\bullet$.
   (b) Montrer que les deux applications produits $*$ et $\bullet$ sont égales.
   (c) Montrer que les deux applications produits définissent une structure de monoide commutatif sur M.

2. Soit $(G, *, e)$ un groupe topologique connexe par arcs.

   (a) Montrer que la loi de groupe de G donne une nouvelle loi de groupe sur $\pi_1(G, e)$: Si $\alpha, \beta\colon [0,1] \to G$ sont deux lacets dans G basés en e, on note $\alpha * \beta$ le lacet défini par la multiplication point par point, $\alpha * \beta(t) = \alpha(t) * \beta(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (b) Si $\alpha, \beta\colon [0,1] \to G$ sont deux lacets dans G basés en e, on note $\alpha \circ \beta$ leur concaténation. Montrer que $M = \pi_1(G, e)$ avec les óperations $*$ et $\circ$ est dans la situation de la question (1), i.e., l'application $*$ est compatible avec l'óperation $\circ$.
   (c) Montrer que $\alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha$ et $\alpha * \beta$ sont homotopes.
   (d) En déduire que $\pi_1(G, e)$ est un groupe abélien.

Exercice 5.13.
Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue et soit $x \in S^1$. On note $n_x \in \mathbb{Z}$ le nombre tel que le diagramma suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "deg"] & \pi_1(S^1, f(x)) \arrow[d, "deg"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, ".n_x(f)"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

1. Montrer que pour tout chemin d'origine x et d'extrémité y, on a un diagramme commutatif de morphismes de groups (oú $\phi_\gamma([\alpha] = [\gamma^{-1}\alpha\gamma])$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, x) \arrow[rr, "\phi_\gamma"] \arrow[dr, "deg"'] & & \pi_1(S^1, y) \arrow[dl, "deg"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

2. Montrer que le nombre n_x est indépendant de x. On appelle n_x le degré de f, $deg(f)$.

3. Montrer que $deg(f \circ g) = deg(f).deg(g)$.

4. Montrer que deux applications sont homotopes si et seulement si elles ont le même degré.

5. Montrer que l'application $S^1 \to S^1$ donnée par $z \mapsto z^n$ est de degré n.

6. Montrer que si $deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie?

7. Montrer que si est injective alors $|deg(f)| = 1$. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 5.14 (Le bonnet d'âne)**.** Soit T un triangle dans $\mathbb{R}^2$ (avec son interieur) et notons p, q, r ses sommets. On appelle bonnet d'âne le triangle dont on a identifié les arêtes de la façon suivante : $[p, q]$ avec $[q, r]$ et $[p, q]$ avec $[p, r]$. Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant à la bernique d'une application du cercle dans lui-même).

Exercice 5.15 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Montrer que tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine.

Exercice 5.16 (Borsuk-Ulam en dimension 2)**.**

1. Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue. Montrer qu'il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.

2. Montrer qu'aucune partie de $\mathbb{R}^2$ n'est homéomorphe à S^2.

6 Actions de groupes et revêtements

Exercice 6.1 (Actions propres de groupes discrets)**.** Soient G un groupe topologique localement compact, et X un espace topologique localement compact, muni d'une action continue de G. On considère les assertions suivantes.

1. La fonction $G \times X \to X \times X$ définie par $(g, x) \mapsto (x, gx)$ est propre.[3]
2. Pour tout compact K de X, l'ensemble $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est compact dans G.
3. Pour tout compact K de X, l'ensemble $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.
4. Tout point $x \in X$ admet un voisinage compact K tel que $\{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\} = \{1\}$.

Montrer que les assertions (1) et (2) sont équivalentes.

En déduire que si G est muni de la topologie discrète, les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes. Montrer que si on suppose en plus que l'action est libre, alors elles entraînent l'assertion (4). Montrer alors que l'application $X \to X/G$ est un revêtement et que X/G est séparé.

Exercice 6.2. On considère l'espace topologique $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, muni de l'action du groupe $G = \mathbb{Z}$ définie par $n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Parmi les assertions (1) à (4) de l'exercice précédent, lesquelles sont vérifiées ? L'application $X \to X/G$ est-elle un revêtement ? Le quotient est-il séparé ?

Exercice 6.3 (Espaces homogènes)**.** Soit G un groupe opérant sur un espace topologique X. On suppose que l'action est transitive, et que les topologies de X et de G sont localement compactes. Soit $x \in X$. On note G_x son stabilisateur, $G_x = \{g \in G, gx = x\}$. On munit l'ensemble $G_x \backslash G$ des classes à gauche de la topologie quotient. On suppose en outre que G est séparable (*i.e.*, G admet une partie dénombrable dense). Montrer que $G_x \backslash G$ est homéomorphe à X.

Exercice 6.4 (Groupes et revêtements)**.**

1. Montrer que la projection $S^n \to \mathbb{R}P_n$ est un revêtement de degré 2.
2. Soit $H < G$ un sous-groupe discret. Montrer que H agit (à gauche, par exemple) sur G de façon libre et propre. En déduire que la projection $G \to H \backslash G$ est un revêtement. Donner quelques exemples concrets.
3. Soit $C_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \text{tels que } z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j\}$ et $P_n = \{X \subset \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathrm{Card}(X) = n\}$. Montrer que l'application $\phi : C_n \to P_n$ définie par $\phi(z_1, \ldots, z_n) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ est un revêtement.

Exercice 6.5 (Revêtements versus homéomorphismes locaux)**.**

1. Soit $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme local entre deux espaces topologiques, et soit U un ouvert de X. Montrer que la restriction de f à U est encore un homéomorphisme local de U vers Y.

[3] On rappelle (?) que, si X, Y sont deux espaces séparés, un dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *propre* si elle est fermée et si l'image réciproque, par f, de tout singleton de Y est une partie compacte de X. On rappelle aussi que, si Y est supposé localement compact, alors cela équivaut à ce que la préimage de tout compact soit compacte.

2. On considère le revêtement $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$. Sa restriction à l'ouvert $]0,3[$ est-elle un revêtement ? Quels sont les ouverts U de $\mathbb{R}$ tels que les restrictions $p_U\colon U \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ soient des revêtements ?

3. Soit $p\colon X \to Y$ un homéomorphisme local. On suppose que X est séparé, et qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour tout $y \in Y$, $p^{-1}(\{y\})$ est de cardinal n. Montrer que p est un revêtement.

Exercice 6.6 (Produits de revêtements)**.** On considère, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la paire $E_n = \{a_n, b_n\}$ munie de la topologie discrète, le singleton $B_n = \{c_n\}$, et l'application $p_n\colon E_n \to B_n$ constante.

1. L'application p_n est-elle un revêtement ?

2. On considère les espaces produits $E = \Pi_{n\in\mathbb{Z}} E_n$ et $B = \Pi_{n\in\mathbb{Z}} B_n$, et l'application produit $p\colon E \to B$. L'application p est-elle un revêtement ?

Exercice 6.7 (Revêtements sur $\mathbb{C}$)**.**

1. Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Est-il trivial ?

2. Montrer que $z \mapsto z^2$ est un revêtement de $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Est-ce un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?

3. Trouver un revêtement non trivial $X \to B$ tel que les espaces X et B soient homéomorphes.

4. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et $F \subset \mathbb{C}$ l'ensemble de ses valeurs critiques ($F = \{P(w), P'(w) = 0\}$). Montrer que $P|_{\mathbb{C}\smallsetminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \smallsetminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \smallsetminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.

Exercice 6.8 (Bouteille de Klein)**.** On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ et on note K le quotient.

1. Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbb{R}^2$ d'un sous-groupe de son groupe d'isométries.

2. Montrer que K est compact et connexe et que la projection canonique est un revêtement.

3. Construire un revêtement à deux feuillets : $S^1 \times S^1 \to K$.

4. Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$ feuillets de M sur K où M est le ruban de Möbius.

Exercice 6.9 (Quaternions, rotations et revêtements)**.**

1. *Généralités sur les quaternions:*
   Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbb{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer que

- $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$ de base $1, i, j, k$ doublé d'une sous-algèbre.
- Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
- L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur $\mathbb{H}$. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ qui s'identifie à $\mathrm{SU}(2)$ et S^3.
- $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.

2. *Topologie de SO(3):* Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x, y, z) = xi + yj + zk$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs. Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur. Montrer que quq^{-1} est un quaternion pur.

   Définissons $\phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.

3. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in SO(3)$. En déduire deux applications
$$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{SO}(3).$$
   Montrer que la première est un morphisme de groupe et un revêtement double et que la deuxième est un homéomorphisme.

4. *Topologie de SO(4):* Soit q_1, q_2 deux éléments de $\mathbb{H}^*$. On note $\phi_{q_1,q_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'application définie par $\phi_{q_1,q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$. En déduire un morphisme de groupe de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$. Montrer que c'est un revêtement double.

7 Classification de Revêtements

Exercice 7.1 (Relèvement)**.** Soit S^3 la sphère vue comme le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ formé des couples (u, v) vérifiant $|u|^2 + |v|^2 = 1$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. L'application $\mathbb{Z}/3 \times S^3 \to S^3$ définie par $[m] \cdot (u, v) = (j^m u, j^m v)$ définit une action continue du groupe $\mathbb{Z}/3$ sur l'espace topologique S^3. On note X le quotient de cette action.

1. Quel est le groupe fondamental de X ?

2. On considère le revêtement $p : S^3 \to P^3(\mathbb{R})$ où $P^3(\mathbb{R})$ est l'espace projectif réel, obtenu comme quotient de S^3 par l'identification $x \sim -x$.

   Montrer que toute application $f : X \to P^3(\mathbb{R})$ se relève à S^3, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{f} : X \to S^3$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$.

Exercice 7.2 (Points tripodaux)**.** Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. On veut montrer qu'il existe une base orthonormée directe u, v, w de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = f(v) = f(w)$ (propriété notée R dans la suite).

1. Soit $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $q(x) = x^3$. Montrer que c'est un revêtement galoisien et expliciter son groupe d'automorphisme.

2. Soit e_0, e_1, e_2 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C \in SO(3)$ l'élément défini par $Ce_i = e_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{Z}/3$. On note Γ le sous-groupe de $SO(3)$ engendré par C, X le quotient $SO(3)/\Gamma$ et $p : SO(3) \to X$ la projection canonique. Montrer que p est un revêtement galoisien et expliciter son groupe d'automorphismes.

3. Montrer que X est connexe par arcs et que son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/6$.

4. Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue, $j = e^{2i\pi/3}$ et définissons $g : SO(3) \to \mathbb{C}$ par $g(A) = f(Ae_0) + j^2 f(Ae_1) + jf(Ae_2)$. Vérifier que l'on a $g(AC) = jg(A)$ et que $g(A) = 0$ si et seulement si $f(Ae_0) = f(Ae_1) = f(Ae_2)$.

5. Supposons que R n'est pas vérifiée. On a alors $g : SO(3) \to \mathbb{C}^*$. Montrer qu'on peut trouver $h, l : X \to \mathbb{C}^*$ qui font commuter le diagramme suivant et conclure.

$$\begin{tikzcd} SO(3) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C}^* \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "l"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Exercice 7.3 (Grille et bouquet de cercles)**.** On note $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ le revêtement défini par $p(x, y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$. On note $A = S^1 \times \{1\}$, $B = \{1\} \times S^1$ et $X = A \cup B$. On note $A' = X \smallsetminus \{(1, -1)\}$ et $B' = X \smallsetminus \{(-1, 1)\}$. Enfin on note $\alpha(t) = (e^{2i\pi t}, 1)$ et $\beta(t) = (1, e^{2i\pi t})$ deux lacets de X.

1. Montrer que A et B sont des rétracts par déformation de A' et B' respectivement.

2. Montrer que $A' \cap B'$ est contractile.

3. Montrer que $\pi_1(X, (1, 1))$ est engendré par $[\alpha]$ et $[\beta]$. Donner une présentation du groupe $\pi_1(X, (1, 1))$.

4. Calculer, de même, le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles.

5. On note E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des couples (x, y) tels qu'on ait $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$. On note encore $p : E \to X$ l'application induite par p et par $i : X \to S^1 \times S^1$ l'inclusion.
   (a) Montrer que $p : E \to X$ est un revêtement galoisien et déterminer son groupe d'automorphismes.
   (b) Montrer qu'il existe une suite exacte de la forme suivante :
   $$1 \longrightarrow \pi_1(E, (0,0)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, (1,1)) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$
   (c) Notons C le carré de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$ et notons $j : C \to E$ l'inclusion. Calculer $\pi_1(C, (0,0)$ et décrire un de ses générateurs.
   (d) Décrire l'image de ce générateur par l'application $(p \circ j)_* : \pi_1(C, (0,0)) \to \pi_1(X, (1,1))$.
   (e) Montrer qu'il existe une rétraction de E sur C, et que l'homéomorphisme j_* est injectif.

Exercice 7.4 (Ping-pong)**.** Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, et soient A et B deux sous-groupes de X. On suppose qu'il existe deux parties non vides, disjointes, X_A et X_B de X telles que pour tout $a \in A$ distinct de 1, $a \cdot X_A \subset X_B$, et que pour tout $b \in B$ distinct de 1, $b \cdot X_B \subset X_A$.

1. On suppose que A et B sont de cardinal au moins 2, et que l'un des deux est de cardinal au moins 3. Montrer que l'application naturelle $A * B \to G$ est injective.
2. Que dire si A et B sont tous les deux de cardinal 2 ?
3. Comment adapter les hypothèses dans le cas où il y a au moins trois groupes en jeu ? (On devrait alors parler de "grippe-sous" plutôt que de ping-pong !).

Exercice 7.5 (Le groupe modulaire)**.**

1. Identifier le produit amalgamé $\mathbb{Z}/2 *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3$, où les morphsimes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3$ sont les projections canoniques.
2. On souhaite montrer que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$.
   (a) Montrer que les éléments $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. (On pourra par exemple montrer par récurrence sur $|c|$ que l'élement $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est contenu dans le sous-groupe engendré par ces deux éléments).
   En déduire un morphisme surjectif $\varphi \colon \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme. (On pourra utiliser l'exercice précédent).

Exercice 7.6 (Présentation du groupe de la bouteille de Klein)**.** Dans cet exercice on note K le quotient du carré $[0,1]^2$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par : $(0, y) \sim (1, y)$ pour tout $y \in [0,1]$, et $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ pour tout $x \in [0,1]$.

En utilisant le théorème de Seifert-Van Kampen, donner une présentation d'un groupe fondamental de K.

Exercice 7.7 (Automorphismes de revêtements)**.**

1. Déterminer tous les automorphismes du revêtement $S^1 \to S^1$ donné par $z \mapsto z^n$ $(n \geq 1)$. Est-ce un revêtement galoisien ?

2. Montrer que la projection canonique $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ est un revêtement et calculer son groupe d'automorphismes.

3. Soient X et Y les graphes représentés ci-dessous et $p : X \to Y$ la projection "verticale" donnée par la figure :

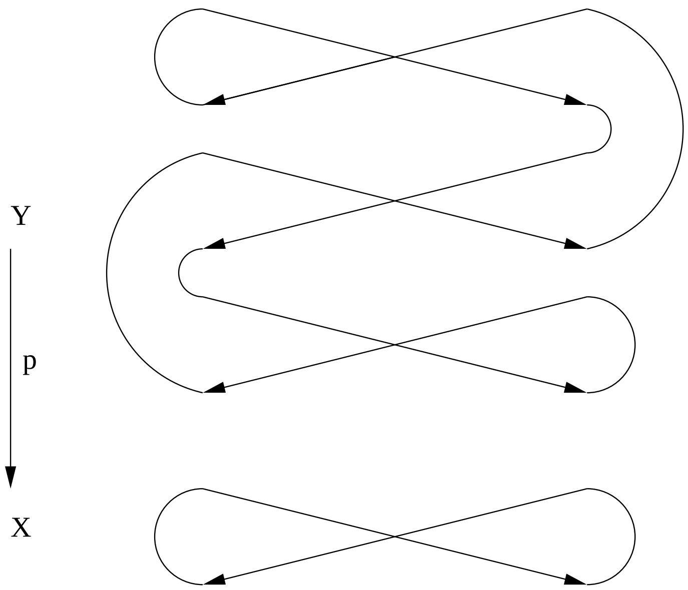


Figure 1: Le revêtement $p : Y \to X$.

   (a) Déterminer les automorphismes du revêtement p. Est-ce un revêtement galoisien ?

   (b) Construire un revêtement $\widehat{Y}$ de degré 2 de Y tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de X et de même, constuire un revêtement $\widehat{X}$ de degré 2 de X tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de degré 3 de $\widehat{X}$.

Exercice 7.8 (Revêtements et boucles hawaïennes)**.** On considère les boucles hawaïennes $\mathbb{H} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, c'est à dire la réunion $\mathbb{H} = \bigcup_{n>0} C_n$ des cercles C_n $(n \geq 1)$ de centre $(1/2n, 0)$ et de longueur $1/2n$. On note aussi $\mathbb{H}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{H},\ y \geq 0\}$ et $\mathbb{H}_- = \{(x, y) \in \mathbb{H},\ y \leq 0\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$ sont simplement connexes. $\mathbb{H}$ est-il simplement connexe ? Localement simplement connexe ?

2. Pour tout $n \geq 1$, construire un revêtement $p_n : E_n \to \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$ tel que la restriction $E_{n|C_n}$ ne soit pas trivial.

3. On note $E = \coprod_{n>0} E_n$ la réunion disjointe des E_n et $p : E \to \mathbb{H}$ l'application induite par les p_n. Montrer qu'il existe un revêtement *trivial* T de $\mathbb{H}$ tel que E soit un revêtement de T, mais que E *ne soit pas* un revêtement de $\mathbb{H}$.

4. Démontrer que les restrictions $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_+)}$ et $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_-)}$ sont des revêtements de $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$, qui sont de plus triviaux.

Exercice 7.9 (Quelques revêtements universels)**.**

1. Déterminer les revêtements universels des sphères S^n ($n \geq 1$), de $\mathbb{C}^*$, des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$, du tore $S^1 \times S^1$, de la bande de Möbius et la bouteille de Klein.

2. (*le revêtement universel du "huit"*) On construit une partie $A_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ de $\mathbb{R}^2$ par récurrence de la manière suivante (voir Figure 2).

   - L'ensemble A_0 est formé du seul point 0.
   - L'ensemble A_1 est formé des 4 segments $[-1,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1,1]$.
   - On a un graphe formé de 4 arètes, deux horizontales et deux verticales. À distance 1/3 de l'extrémité libre de chacune, on rajoute le segment de longueur 2/3 dont l'arête est la médiatrice.
   - Étape n. À distance $1/3^n$ de l'extrémité libre de chaque arête, on ajoute un segment de longueur $2/3^n$ dont notre arête est la médiatrice.

   On construit ainsi une partie de $\mathbb{R}^2$ formée de segments horizontaux et verticaux se coupant orthogonalement. On munit l'ensemble A_∞ de la distance d telle que

   - Chaque arête est isométrique au segment $]0,1[$.
   - La distance entre deux sommets est la longueur d'un chemin (sans aller-retour) dans A_∞ joignants ces deux sommets.

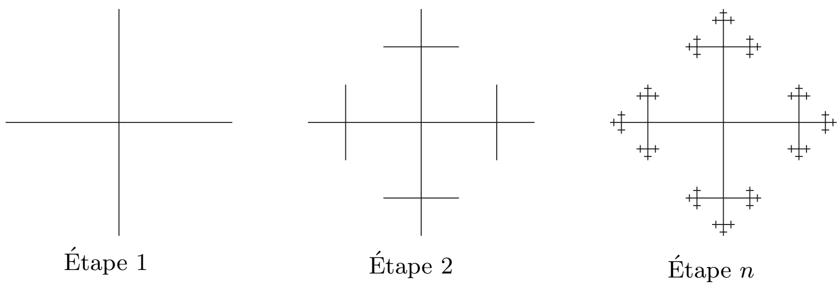


Figure 2: Construction d'un arbre

   (a) Montrer que A_∞ muni de la distance d est un espace métrique connexe et simplement connexe.

   (b) On oriente toutes les arêtes : les verticales de bas en haut et les horizontales de gauche à droite. On définit une application p de A_∞ sur le huit en envoyant chaque arête horizontale (resp. verticale) sur la boucle a (resp. b) par l'application quotient $[0,1] \to [0,1]/(0 \sim 1) \cong S^1$ (voir Figure 3). Montrer que p est le revêtement universel du huit.

Exercice 7.10 (Classifications des revêtements de quelques espaces classiques)**.** Décrire tous les revêtements (à isomorphisme de revêtement près)

1. de S^1,

2. de $\mathbb{R}P^2$,

3. de $S^1 \times S^1$,

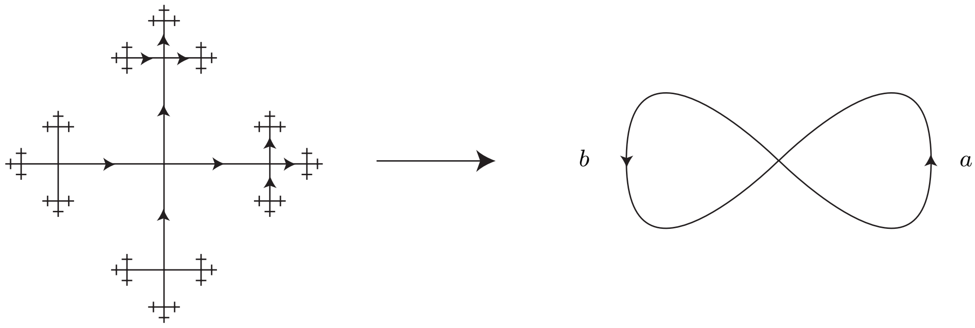


Figure 3: Arbre et graphe huit

4. de la bouteille de Klein,
5. du graphe en 8, avec 2 et 3 feuillets.

Exercice 7.11 (Revêtement universel d'un groupe topologique)**.** Soit G un groupe topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe.

1. Montrer comment munir son revêtement universel $\widetilde{G}$ d'une structure de groupe, de sorte que la projection $\widetilde{G} \to G$ soit un morphisme de groupes.
2. Exhiber une suite exacte
$$1 \to \pi_1(G, e) \to \widetilde{G} \to G \to 1,$$
et montrer que l'image de $\pi_1(G, e)$ est contenue dans le centre de $\widetilde{G}$.